BAB III

PROSES DAN KONDISI TRAFIK

3.1 Pengertian Proses Random

Suatu jaringan telekomunikasi berfungsi mengelola trafik yang dibangkitkan oleh sejumlah besar pelanggan yang terkoneksi ke jaringan tersebut. Pelanggan-pelanggan melakukan pemanggilan secara random, artinya, kapan dimulainya, berapa lama berlangsungnya, dan kapan berakhirnya tidak dapat diketahui dengan pasti. Pembangkitan panggilan oleh para pelanggan dan proses kejadiannya pada jaringan atau sistem switching dapat dijelaskan sebagai suatu **proses random** (acak). Suatu proses random atau proses stokastik adalah suatu proses dimana nilai sesaat dari satu atau lebih kejadian yang bervariasi terhadap waktu tidak dapat ditentukan dengan pasti, tetapi dapat diramalkan dengan probabilitas tertentu. Kejadian-kejadian dalam suatu proses random disebut sebagai variabel random. Nilai-nilai yang termuat pada variabel-variabel random dari suatu proses random dapat bersifat diskrit atau kontinyu.

Trafik telepon dapat dikualifikasikan sebagai suatu proses stokastik, dimana jumlah dari pelanggan aktif dan jumlah server yang sibuk (diduduki) secara simultan merupakan variabel-variabel random. Dalam kasus trafik telepon ini, variabel random hanya memuat nilai-nilai diskrit. Sedang nilai variasi temperatur yang direpresentasikan oleh suatu variabel random hasil suatu eksperimen merupakan contoh untuk suatu nilai yang bersifat kontinyu.

Dalam kenyataannya, memang tidaklah mungkin untuk mengestimasikan secara akurat jumlah pelanggan aktif secara simultan pada suatu saat tertentu. Hal yang dapat dilakukan adalah membuat prediksi dengan suatu probabilitas tertentu. Teori probabilitas yang umum digunakan untuk pendekatan proses random adalah **Proses Markov** dan **Proses Kelahiran-Kematian** (*Birth-death Process*).

3.2 Proses Markov

Proses Markov dikembangkan oleh A.A. Markov pada tahun 1907, yang memperkenalkan bentuk penyederhanaan yang praktis terhadap variabel-variabel random yang menghasilkan suatu proses stokastik. Bentuk penyederhanaan dari Markov sangat cocok untuk pemodelan proses pada sistem-sistem switching. Formula matematis proses stokastik dari Markov didefinisikan sebagai berikut :

$$P\,[\{X(t_{k+1}) = x_{k+1}\} \,/\, \{X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \ldots\ldots, X(t_1) = x_1\}] =$$
$$P\,[\{(t_{k+1}) = x_{k+1}\} \,/\, \{X(t_k) = x_k\}] \qquad \ldots\ldots (3\text{-}1)$$

Dimana $t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_k < t_{k+1}$ dan x_i adalah nilai pada kondisi diskrit ke-i.

Persamaan (3-1) menyatakan bahwa probabilitas variabel random X yang memuat nilai x_{k+1} pada step waktu k+1 adalah ditentukan oleh kondisi nilai di step waktu terdahulu, yaitu step waktu k, dan tidak tergantung pada kondisi nilai-nilai di step waktu yang lebih awal; k-1, k-2, k-3, dst. Dapat pula dinyatakan bahwa seluruh sejarah dari suatu proses dapat diwakili oleh kondisi saat ini dan kondisi yang akan datang hanya tergantung (ditentukan) oleh kondisi saat ini.

Jika demikian, periode waktu berlangsungnya proses pada kondisi saat ini harus tidak berperan pada penentuan kondisi berikutnya. Dengan demikian, diperlukan beberapa spesifikasi waktu yang menjelaskan kondisi transisi. Karena proses bersifat random, maka spesifikasi waktu juga harus berbentuk suatu variabel random.

3.3 Proses Kelahiran - Kematian (*Birth-death Process*)

Proses kelahiran-kematian (*birth-death process*) merupakan suatu kasus khusus dalam proses Markov. Dalam hal ini, transisi dimungkinkan hanya antara kondisi yang berturutan, dimana pengamatan proses kelahiran-kematian dilakukan pada proses-proses yang bersifat *continuous-time* sehingga probabilitas bahwa lebih dari satu kejadian (*event*) terjadi pada interval waktu infinitesimal adalah NOL, sesuai persamaan berikut :

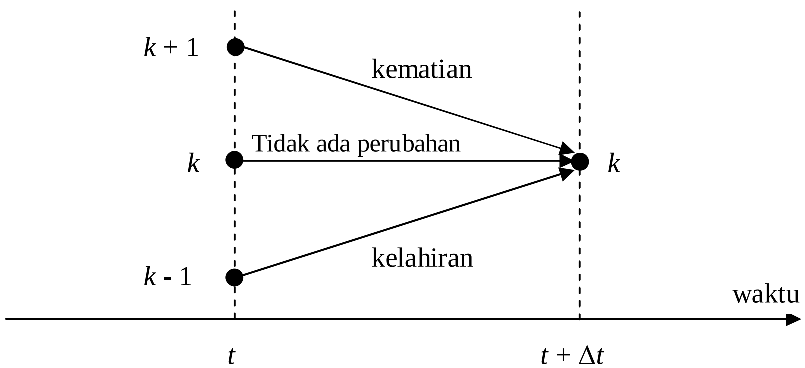
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{>1\}}{\Delta t} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}2)$$

Dimana persamaan ini biasanya disebut sebagai *ordinarity*. Dapat juga dinyatakan dengan :

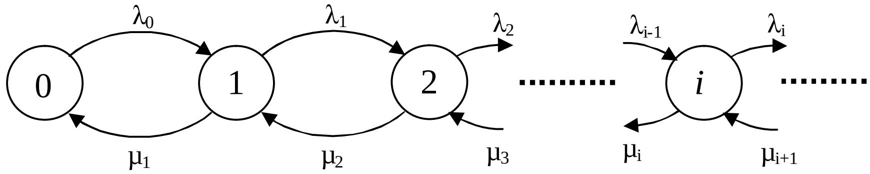
$$\frac{P\{>1\}}{\Delta t} = 0\ (\Delta t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\text{-}3)$$

Proses kelahiran-kematian biasanya digunakan untuk menganalisa sistem-sistem yang bersifat masa seperti sistem jaringan telekomunikasi dan komputer (dimana sistem mempunyai pelanggan dalam jumlah besar). Proses ini cocok untuk pemodelan perubahan-perubahan pada jumlah populasi. Dalam suatu jaringan telekomunikasi, populasi adalah jumlah pelanggan (*user*) dalam sistem. Jika besarnya populasi dinyatakan dengan k, maka untuk analisa dengan proses kelahiran-kematian ini kondisi sistem dapat kita notasikan dengan E_k . Jadi dari kondisi k , maka proses kelahiran-kematian dapat transit hanya ke kondisi k+1 dan k-1, atau hanya pada kondisi k dengan interval waktu sebesar Δt.

Jika dalam kondisi k, rate kelahiran adalah λ_k dan rate kematian adalah μ_k, dimana rate kelahiran dan kematian ini tidak tergantung dengan waktu, tetapi hanya pada kondisi E_k yang terjadi, maka transisi pada suatu proses kelahiran kematian dapat diperlihatkan pada gambar 3.1 dan diagram kondisinya seperti pada gambar 3.2.



Gambar 3.1 Transisi kondisi pada suatu proses kelahiran-kematian



Gambar 3.2 Diagram kondisi Markov satu dimensi untuk suatu proses kelahiran-kematian dengan populasi tidak terbatas.

Kondisi E_k dapat dicapai pada interval waktu Δt dari kondisi E_{k-1}, E_k dan E_{k+1}. Berdasarkan kenyataan bahwa kelahiran dan kematian adalah hal yang tidak saling berhubungan, serta dengan memperhatikan gambar 3.1, maka dapat dinyatakan :

1. Probabilitas benar ada satu kelahiran pada $(t, t + \Delta t)$ ketika proses pada kondisi E_{k-1} adalah $\lambda_{k-1} \Delta t + 0(\Delta t)$.
2. Probabilitas benar ada satu kematian pada $(t, t + \Delta t)$ ketika proses pada kondisi E_{k+1} adalah $\mu_{k+1} \Delta t + 0(\Delta t)$.
3. Probabilitas benar tidak ada kelahiran pada $(t, t + \Delta t)$ ketika proses pada kondisi E_k adalah $1- \lambda_k \Delta t + 0(\Delta t)$.
4. Probabilitas benar tidak ada kematian pada $(t, t + \Delta t)$ ketika proses pada kondisi E_k adalah $1- \mu_k \Delta t + 0(\Delta t)$.

Jika probabilitas transisi dari kondisi i ke kondisi j dinyatakan dengan P_{ij}, maka dengan menggunakan pendekatan *Kolgomorov-Chapman*, maka dapat dianalisa transisi-transisi yang mungkin terjadi. Dengan mengambil interval waktu $(t, t + \Delta t)$, maka untuk kondisi E_k akan hanya dapat dimasukkan tiga kemungkinan *mutual exclusive*, yaitu :

1. P\{tidak terjadi perubahan kondisi pada kondisi k\} = $[1-\lambda_k\Delta t + 0(\Delta t)]\ [1-\mu_k\Delta t + 0(\Delta t)]$;
2. P\{sistem pada kondisi k-1 dan terjadi satu kelahiran\} = $\lambda_{k-1} \Delta t + 0(\Delta t)$;
3. P\{sistem pada kondisi k+1 dan terjadi satu kematian\} = $\mu_{k+1} \Delta t + 0(\Delta t)$;

Jika $P_k(t)$ adalah probabilitas bahwa sistem berada dalam kondisi k pada waktu t dan $p_{k,j}(\Delta t)$ merupakan probabilitas transisi dari kondisi k ke kondisi j selama waktu t, maka dapat ditulis :

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)\, p_{k,k} (\Delta t) + P_{k-1}(t)\, p_{k-1,k} (\Delta t) + P_{k+1}(t)\, p_{k+1,k} (\Delta t) \qquad \text{.... (3-4)}$$

Jika $p_{i,j}(\Delta t)$ diekspresikan menggunakan kecepatan kelahiran dan kematian, maka dapat diperoleh :

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t P_k(t) + \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t) + 0(\Delta t)$$

..... (3-5)

Berdasarkan persamaan tersebut, dengan beberapa penyelesaian aljabar, dapat diperoleh :

$$P_k(t + \Delta t) - P_k(t) / \Delta t = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + 0(\Delta t)$$

.....(3-6)

Jika $\Delta t \to 0$, maka didapat,

$$dP_k(t) / dt = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + 0(\Delta t), \quad k \geq 1$$

$$dP_0(t) / dt = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \quad k = 0$$

..... (3-7)

yang disebut sebagai **Persamaan Kondisi**.

Apabila persamaan (3-7) merepresentasikan kecepatan perubahan probabilitas kondisi, maka perlu diperhatikan kondisi keseimbangan dari operasi dalam jaringan. Dalam kondisi stasioner, pada sistem terjadi kondisi :

$$P_k = \lim_{\Delta t \to \infty} P_k(t)$$ .... (3-8)

Selanjutnya

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{dPk\,(t)}{dt} = 0$$ .... (3-9)

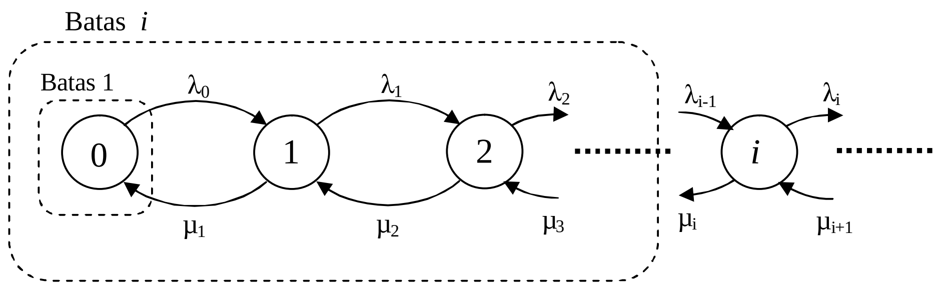
Pada kesetimbangan statistik, dengan menggunakan persamaan (3-7) akan didapat

$$\lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1} - (\lambda_k + \mu_k)P_k = 0, \quad \text{untuk } k \geq 1$$

$$\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0, \quad \text{untuk } k = 0$$

.... (3-10)

Karena tidak mungkin jumlah pelanggan bernilai negatif dalam sistem, maka $P_i = 0$ untuk $i < 0$, dan $\lambda_i = 0$ untuk $i < 0$, $\mu_j = 0$ untuk $j < 1$. Karena proses kelahiran-kematian pada kesetimbangan statistik merupakan suatu bagian dari proses-proses Markov, maka untuk kesetimbangan dapat digunakan persamaan umum dari Markov yang analisanya dapat dilakukan berdasarkan diagram kondisi pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Diagram kondisi dari suatu proses kelahiran-kematian dalam kesetimbangan.

Untuk mendapatkan keterkaitan antar probabilitas kondisi, pada analisa dibuat batas-batas (*boundaries*) 1 sampai *i*. Total *rate outgoing* dari suatu batas tertutup harus ekivalen dengan total *rate incoming* kedalam batas tersebut pada suatu kesetimbangan kondisi. Dengan menggunakan batas 1 pada gambar 3.3, akan diperoleh :

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \qquad \text{............. (3-11)}$$

dan selanjutnya; dari batas ke-*i* didapat :

$$\lambda_{i-1} . P_{i-1} = \mu_i . P_i \qquad \text{............. (3-12)}$$

Dalam kondisi seimbang (*steady state*) ini, probabilitas-probabilitas kondisi mencapai keseimbangan nilai dan tidak berubah terhadap waktu (bukan fungsi waktu), misal $P_k(t_1) = P_k(t_2) = P_k(t_i) = P_k$. Dalam kondisi ini, mengacu pada persamaan 3-7, maka :

$$dP / dt = 0 \qquad (P_k(t) \neq f(t))$$

dan proses kelahiran-kematian menjadi stasioner.

Untuk :

$k = 0$: $\quad 0 = - \lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1$

$\lambda_0 . P_0 = \mu_1 . P_1$ .... (1)

$k = 1$: $\quad (\lambda_1 + \mu_1).P_1 = - \lambda_0 . P_0 + \mu_2 . P_2$ .... (2)

$k = 2$: $\quad (\lambda_2 + \mu_2).P_2 = - \lambda_1 . P_1 + \mu_3 . P_3$ .... (3)

k = 3, 4, ... , s/d k :

$$(\lambda_k + \mu_k).P_k = \lambda_{k-1}.P_{k-1} + \mu_{k+1}.P_{k+1} \text{ ...(n)}$$

Substitusi persamaan (1) ke (2) :

$\lambda_1 .P_1 = \mu_2.P_2$

dst

$\lambda_2 .P_2 = \mu_3 .P_3$

$\lambda_3 .P_3 = \mu_4 .P_4$

.

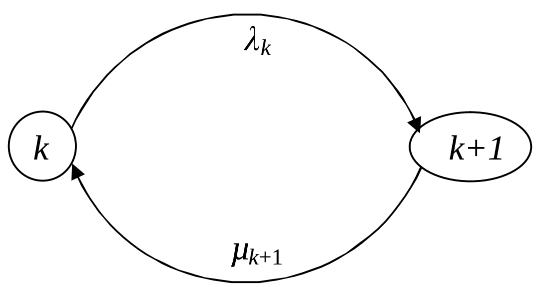
.

.

$$\boldsymbol{\lambda_k .P_k = \mu_{k+1} .P_{k+1}} \qquad \text{............. (3-13)}$$

sebagai **Persamaan Kesetimbangan**, yang mempunyai pengertian **Berapa kali perubahan dari kondisi *k* ke *k*+1 sama dengan berapa kali perubahan dari *k*+1 ke *k*.**

Diagram kondisinya diperlihatkan pada gambar 3.4.



Gambar 3.4 Diagram kondisi kesetimbangan.

Jika diasumsikan, untuk penyederhanaan, bahwa sistem dimulai pada kondisi E_0 pada waktu $t = 0$:

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \qquad \text{............... (3-14)}$$

Maka dari persamaan (3-7) dan (3-8) akan didapat suatu persamaan diferensial yang solusinya adalah

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad \text{................ (3-15)}$$

Kemudian untuk nilai $k \geq 1$;

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ , \ k \geq 0, t \geq 0 \qquad \text{............. (3-16)}$$

Relasi terakhir ini dikenal sebagai distribusi Poisson. Persamaan tersebut mengkarakterisasikan proses Poisson, dimana dalam kenyataannya merupakan suatu proses kelahiran murni dengan :

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \qquad \text{dan} \quad \mu_k = 0 \text{ untuk setiap } k \qquad \text{............. (3-17)}$$

Proses Poisson cukup signifikan dalam pembahasan teori trafik telekomunikasi, terutama pada jaringan *circuit-switched*.