BAB IV

TEORI DISTRIBUSI PADA REKAYASA TRAFIK (MODEL TRAFIK)

Untuk dapat menganalisa trafik dari suatu sistem telekomunikasi, biasanya dilakukan pemodelan. Umumnya pemodelan ini meliputi 2 fasa, yaitu pemodelan dengan melihat pola kedatangan trafik (*incoming traffic*) dan sistem, biasanya dikenal sebagai model trafik dan model sistem. Untuk model sistem, dikenal 2 kategori, yaitu model sistem rugi (*loss system*) dan model sistem antrian (*waiting/queueing systems*). Pembahasan model trafik pada bab ini akan dilakukan berdasarkan pada pola distribusinya, yaitu meliputi distribusi Poisson, Erlang, Engset dan Bernoulli.

4.1 Model Kedatangan Trafik dengan Distribusi Poisson

Pemodelan trafik dengan melihat pola kedatangan panggilan dilakukan dengan menggunakan distribusi Poisson. Model Poisson ini didapat dari keadaan sebagai berikut :

- Kedatangan panggilan bersifat random (acak), dengan rate datangnya panggilan = λ (konstan, tidak tergantung jumlah pendudukan yang ada) karena jumlah sumber panggilan tidak terhingga (besar).
- Hanya ada proses kelahiran, tidak ada proses kematian
- Jumlah server (saluran) yang menampung (mengolah) tidak terhingga (besar), sehingga panggilan yang datang selalu dapat dilayani oleh server-server tersebut.

Untuk kondisi tidak ada kematian, maka $\mu_k = 0$ dan persamaan kondisi proses kelahiran kematian sesuai persamaan (3-7) akan menjadi :

$$dP_k(t) / dt = - \lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) , \quad k \geq 1$$

$$dP_0(t) / dt = - \lambda_0 P_0(t) , \quad k = 0 \qquad \text{..... (4-1)}$$

Untuk penyelesaian persamaan ini, diasumsikan pengamatan dimulai pada $t = 0$, yaitu ketika sistem berada pada kondisi ke nol (kondisi E_0) dimana tidak ada kelahiran yang terjadi, maka :

$$P_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$$

dan dengan kondisi tersebut akan didapat solusi untuk persamaan (4-1), yaitu :

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Sehingga untuk k =1, dari persamaan (4-1) akan didapat :

$$dP_1(t) / dt = \lambda\, e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t)$$

yang pemecahannya :

$$P_1(t) = \lambda t.\ e^{-\lambda t}$$

Untuk $k = 2$,

$$P_2(t) = (\lambda t)^2.\ e^{-\lambda t} / 2!$$

Untuk $k = 3$,

$$P_3(t) = (\lambda t)^3.\ e^{-\lambda t} / 3!$$

dst., ..., sehingga dengan induksi didapat penyelesaian umum sebagai ,

$$\boldsymbol{P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\ e^{-\lambda t}} \qquad \text{.....} \quad (4\text{-}2)$$

Yang dikenal sebagai persamaan **Distribusi Poisson** atau **Proses Kedatangan Poisson** (*Poisson arrival process equation*). Lihat juga persamaan (3-16), persamaan ini pada dasarnya mengekspresikan probabilitas sistem dengan jumlah pendudukan sebanyak k pada waktu t. Dengan kata lain, ini merepresentasikan probabilitas adanya k kedatangan pada interval waktu t.

Persamaan (4-2) dapat juga diturunkan dengan memperhatikan persamaan kondisi (3-7) untuk kondisi $k \geq 1$ agar selanjutnya dapat melihat bentuk diagram kondisinya, yaitu :

$$dP_k(t) / dt = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + 0(\Delta t)$$

Dengan memperhatikan λ_1 , λ_2 , ..., λ_k dan μ_1, μ_2,....., μ_k , dimana :

λ_k : Koefisien kelahiran

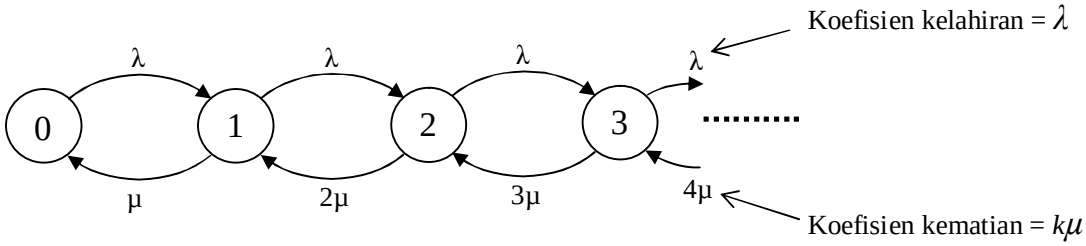
Untuk sumber panggilan yang besar sekali, berarti bahwa rate datangnya panggilan tetap dan tidak tergantung sudah berapa besar panggilan yang telah berhasil menduduki peralatan (server), jadi $\lambda_1 = \lambda_2 = ...= \lambda_k = \lambda$ (konstan).

μ_k : Koefisien Kematian

Karena (λt) merupakan rate rata-rata datangnya panggilan <u>kali</u> waktu lamanya pendudukan rata-rata = trafik = A, maka persamaan (4-2) dapat ditulis sebagai :

$$\boldsymbol{P_k = A^k . e^{-A} / k!} \qquad ..... \quad (4\text{-}3)$$

Dengan diagram kondisi :



Gambar 4.1 Diagram kondisi untuk distribusi Poisson.

- Koefisien kelahiran $\lambda_k = \lambda$,

  Diambil dari probabilitas datangnya 1 panggilan dalam waktu dt = $\lambda.dt$, dimana λ merupakan rate rata-rata datangnya panggilan dalam 1 jam (sibuk).

- Koefisien kematian $\mu_k = k.\mu$,

  Diambil dari probabilitas berakhirnya sembarang 1 pendudukan dalam waktu dt = $k.\mu.dt$, dimana $k.\mu$ merupakan rate rata-rata berakhirnya pendudukan pada kondisi k dalam 1 jam (sibuk).

4.2 Model Sistem

Secara umum, sistem telekomunikasi dapat diklasifikasikan sebagai sistem rugi (*loss system*) atau sistem tunggu/antri (*delay system*). Hal ini terjadi karena jumlah pelanggan yang terkoneksi ke jaringan biasanya lebih banyak dari jumlah server, sehingga membentuk jaringan yang memungkinkan terjadinya *blocking*. Sebagai akibatnya, akan dihasilkan trafik luap (*overflow traffic*) pada jaringan tersebut. Untuk menganalisa sistem-sistem ini, maka akan dijelaskan model trafik untuk sistem pada jaringan *blocking* dan sistem antrian yang terjadi pada sistem berbasis LCC (*Lost Call Cleared*), dengan menggunakan model distribusi Erlang, Engset, dan Bernoulli.

4.2.1 Model Sistem Pada Jaringan Blocking

Pada sistem *circuit switch* dengan jaringan blocking, pada saat semua server sibuk/diduduki maka dapat dimungkinkan terjadinya block yang mengakibatkan panggilan yang datang pada saat itu akan tidak dapat dilayani oleh sistem sehingga sistem dikenal sebagai sistem rugi (*loss system*). Analisa trafik pada sistem rugi ini, telah dilakukan secara mendalam oleh Erlang dengan kesimpulan utama adalah bahwa proses kedatangan panggilan adalah sesuai dengan proses kedatangan Poisson dan proses pemanggilan dapat dimodelkan dengan menggunakan distribusi yang bersifat eksponensial dalam durasi waktu pembicaraan tersebut. Pada sub bab ini akan dibahas trafik pada sistem rugi untuk sistem *Full Accessibility* dan sistem Trafik Multi.

4.2.1.1 Model Sistem Rugi dengan *Full Accessibility*

Model distribusi Erlang merupakan salah satu model trafik pada sistem rugi dengan *full accessibility*. Model ini mewakili jaringan dengan kondisi:

- Proses kedatangannya adalah proses Poisson dengan sumber panggilan tidak terhingga dan rate rata-rata datangnya panggilan λ (konstan)
- Waktu layanan bersifat distribusi eksponensial
- Merupakan sistem *circuit switch* dengan server-server (kanal, trunk, atau time slot) yang bekerja secara paralel dan jumlahnya terbatas

- Satu server/kanal dialokasikan untuk satu panggilan dan panggilan yang datang pada waktu semua server sibuk akan ditolak (sistem LCC).
- Sistem bersifat ***full accessibility***, artinya setiap panggilan yang datang dari pengguna akan bersaing (*compete*) dengan panggilan dari pengguna lainnya untuk menduduki server/kanal yang kosong (tidak ada alokasi terlebih dahulu).

Model distribusi dengan kondisi di atas umumnya digunakan untuk menganalisa trafik pada sistem transmisi trunk. Biasanya dalam suatu jaringan akan terdapat beberapa group trunk yang menghubungkan antara satu peralatan switching (sentral) dengan peralatan switching lainnya.

Analisa kondisi trafik LCC, pertama kali dilakukan oleh A.K. Erlang pada tahun 1917. Tujuan utama dari analisa tersebut adalah untuk mengestimasikan probabilitas blocking dan derajat pelayanan (GoS). Dalam analisa ini, Erlang mengekspresikan trafik yang ditawarkan dengan pesamaan :

$$A = \lambda . t_r \qquad \text{..... (4-4)}$$

Dimana λ merupakan rate kedatangan panggilan rata-rata Poisson yang nilainya ekivalen dengan C (=rate kedatangan panggilan rata-rata) pada persamaan (1-2), sehingga dapat juga didefinisikan bahwa trafik yang ditawarkan sebagai intensitas rata-rata panggilan C_A (panggilan/detik) dikali waktu pendudukan (durasi panggilan) rata-rata t_μ :

$$A = C_A . t_\mu \qquad \text{..... (4-5)}$$

Jelas bahwa $C_A = \lambda$, sedang $t_\mu = 1/\mu$ merupakan distribusi eksponensial dari durasi panggilan, sehingga didapat :

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{..... (4-6)}$$

Ketika semua server dalam keadaan sibuk, trafik yang datang akan ditolak oleh sistem. Karena terjadinya rugi-rugi trafik, maka akan dihasilkan rate kedatangan yang berbeda, yang disebut sebagai rate kedatangan panggilan efektif. Sepanjang tidak semua server dalam keadaan sibuk, maka setiap panggilan yang datang akan dapat diolah oleh jaringan. Trafik pada suatu jaringan yang mengikuti keadaan dan batasan tersebut, dikenal sebagai **Trafik Erlang** atau *Pure chance traffic* (tipe 1). Jika dinotasikan rate kedatangan

panggilan efektif rata-rata sebagai C_0 dan rate kedatangan efektif pada kondisi *i* sebagai C_i , maka didapat :

$$C_i = \lambda \qquad \text{untuk } 0 \le i < N, \; C_N = 0$$

dimana N merupakan jumlah server dalam sistem.

Rate trafik efektif rata-rata C_0 dapat dihitung dengan persamaan :

$$\mathbf{C_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\lambda}.\mathbf{P}_i$$

dimana $\mathbf{P}_i$ adalah probabilitas bahwa sistem berada pada kondisi i. Sistem sendiri dapat berada dalam salah satu kondisi dari 0, 1, 2, 3, ..., N. Sehingga didapat :

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_N = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}7)$$

Dengan demikian, ekspresi C_0 dapat ditulis sebagai

$$C_0 = \lambda\,(P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_{N-1}) = \lambda\,(1 - P_N) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}8)$$

Trafik rata-rata yang diolah oleh jaringan diberikan dengan persamaan

$$Y = C_0.t_r$$

$$= \lambda.\,(1 - P_N).\,t_r \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}9)$$

Dengan menggunakan persamaan (4-4), maka didapat

$$Y = A\,(1 - P_N)$$

Atau

$$\mathbf{P}_N = \frac{A - Y}{A} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}10)$$

yang menyatakan probabilitas semua server sibuk. Dengan demikian, dengan penjelasan pada bab terdahulu dan persamaan (4-10) dapat disimpulkan bahwa **GoS = $\mathbf{P_N}$** , untuk kondisi LCC dimana pola kedatangan trafik mengikuti karakteristik distribusi Poisson.

Jika pada model trafik distribusi Poisson, analisa dilakukan dengan memperhatikan faktor rate kedatangan panggilan, maka pada model distribusi

Erlang, yang dijadikan obyek pengamatan adalah faktor rate berakhirnya pendudukan. Rate berakhirnya pendudukan ini akan tergantung pada jumlah server yang sibuk dalam sistem. Jika jumlah server yang sibuk besar, maka akan ada banyak panggilan yang berakhir pada suatu pengamatan waktu tertentu, dan ini ekivalen dengan rate berakhirnya pendudukan yang tinggi. Karena itu rate berakhirnya pendudukan dapat dianggap berbanding lurus dengan jumlah server yang sibuk dan dapat dinyatakan dengan

$\mu_k = k.\mu$ untuk $0 \leq k \leq N$ ..... (4-11)

dimana

μ_k : rate berakhirnya pendudukan (kematian) pada kondisi k, disebut juga sebagai "koefisien kematian".

μ : rate berakhirnya pendudukan (kematian) rata-rata = $1 / t_r$

Substitusi nilai-nilai rate kelahiran dan kematian pada persamaan (3-10), didapat :

$$\lambda P_{k-1} + \mu (k+1) P_{k+1} - (\lambda + k.\mu) P_k = 0$$

Menggunakan persamaan (4-4), didapat

$P_{k+1} = (A.P_k + kP_k - A.P_{k-1}) / (k+1)$ untuk $k > 0$ ..... (4-12)

$P_1 = A.P_0$ untuk $k = 0$ ..... (4-13)

Untuk $k = 1$, didapat

$$P_2 = (A.P_1 + P_1 - A.P_0) / 2$$

Substitusi untuk P_1 dari persamaan (4-13) :

$$P_2 = A^2.P_0 / 2$$

Dengan cara yang sama untuk $k = 2$, didapat

$$P_3 = (A.P_2 + 2P_2 - A.P_1) / 3 = A^3.P_0 / (3x2) = A^3.P_0 / 3!$$

Sehingga secara umum didapat,

$P_j = A^j.P_0 / j!$ ..... (4-14)

Dari persamaan (4-7) dan (4-14) dihasilkan

$$P_0 + A.P_0 + \ldots\ldots\ldots + A^N P_0 / N! = 1$$

Sehingga,

$$P_0 = 1 / (1 + A + A^2/2! + \ldots\ldots\ldots + A^N / N!)$$

dan

$$\mathbf{P_k} = \frac{A^k / k!}{1 + A + A^2/2! + \ldots\ldots\ldots + A^N / N!} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}15)$$

yang merupakan probabilitas bahwa *k* server (kanal) sibuk, yang secara umum untuk *k* = *n*, biasanya dinyatakan dengan bentuk formula sebagai berikut :

$$E_n(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}16)$$

Persamaan (4-16) ini dikenal sebagai formula **Rugi Erlang** (*Erlang's loss formula*), yang dihasilkan dari penelitian Erlang pada tahun 1917. Formula ini juga dinotasikan dengan $\mathbf{E_{1,n}(A) = E_n(A)}$, dimana indeks 1 mengindikasikan sebagai formula Erlang yang pertama (**formula Erlang-B**).

Untuk n = N, maka dapat ditulis

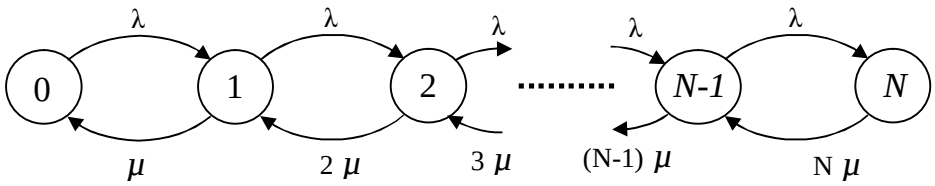
$$\mathbf{P_N} = \frac{A^N / N!}{1 + A + A^2/2! + \ldots\ldots\ldots + A^N / N!} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}17)$$

Dimana P_N merupakan probabilitas semua server sibuk dan juga dikenal sebagai ***Probabilitas Blocking*** (GoS) dari sistem.

Diagram kondisi untuk formula rugi Erlang diperlihatkan pada gambar 4.2, dimana untuk sistem ini:

$\lambda_k = \lambda$, $k = 0,1,2,\ldots, N\text{-}1$ dan

$\mu_k = k\mu$, $k = 1,2,\ldots, N$



Gambar 4.2. Diagram kondisi untuk formula rugi Erlang (distribusi Erlang).

Formula Erlang-B, yang telah digunakan lebih dari seabad yang lalu, saat ini masih tetap digunakan untuk perencanaan dan analisa jaringan telepon *circuit-switched* berbasis akses kawat (komunikasi *fixed*). Dengan beberapa pendekatan, formula ini tetap dapat juga digunakan pada jaringan seluler mobil.

Pada perencanaan suatu sistem (*circuit switch*), perlu dispesifikasikan kebutuhan akan *Grade of Service* (GoS) atau QoS. Biasanya perlu didefinisikan parameter-parameter performansi yang mengindikasikan level QoS untuk sistem yang direncanakan. Parameter QoS utama pada jaringan *circuit-switched* adalah *BLOCKING*. Dapat didefinisikan tiga tipe blocking, yaitu ***call congestion, time congestion,*** dan ***traffic congestion***.

Call congestion adalah probabilitas bahwa suatu panggilan random hilang akibat adanya *blocking*, yaitu pada saat seluruh server atau kanal sibuk pada kedatangan panggilan, dinyatakan dengan :

$$B_C = \frac{\lambda.P(n)}{\sum_{i=0}^{n} \lambda.P(i)} = E_n\,(A) \qquad \text{..... (4-18)}$$

Time congestion adalah ekivalen dengan persentase dari waktu selama semua server yang tersedia sibuk :

$$B_t = \frac{t_{congestion}}{t_{congestion} + t_{idle}} = \frac{t_{congestion}}{T} = E_n\,(A) \qquad \text{..... (4-19)}$$

Sedangkan trafik yang diolah dapat dikalkulasi dengan,

$$Y = \sum_{i=0}^{n} i.P_i = \sum_{i=0}^{n} i.\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} P_0 = A[1-E_{1,n}(A)] \qquad \text{..... (4-20)}$$

Sehingga dapat didefinisikan bahwa trafik yang hilang (*lost traffic*) sebagai

$$Y_R = A - Y = A.E_n(A) = A.B \qquad \text{..... (4-21)}$$

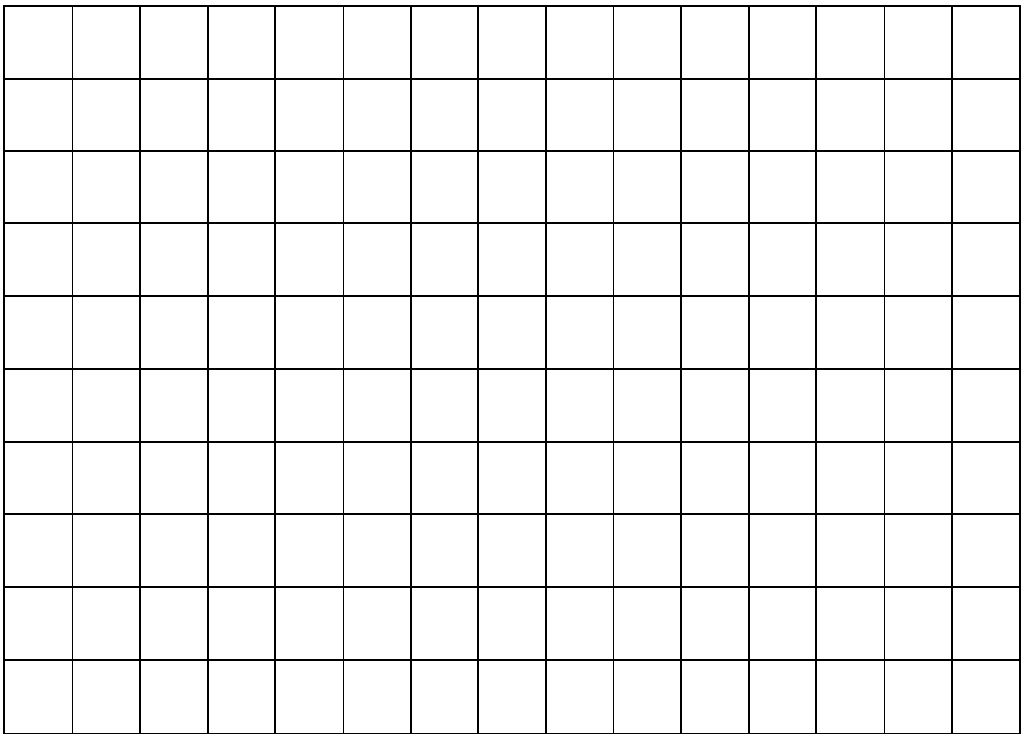
Trafik yang hilang adalah intuitif karena tidak ada trafik tambahan yang datang ketika terjadi panggilan hilang. Karenanya, ***traffic congestion*** dapat didefinisikan sebagai :

$$B_T = \frac{A-Y}{A} = E_n(A) \qquad \text{..... (4-22)}$$

Ketika jumlah dari pelanggan beberapa kali lebih besar dari jumlah server (asumsi sesuai formula rugi Erlang), maka didapat

$$B_C = B_t = B_T = E_{1,n} \qquad \text{..... (4-23)}$$

Ini merupakan suatu karakteristik dari semua sistem dengan proses kedatangan Poisson dan populasi besar. Pada gambar 4.3 dicontohkan blocking sebagai fungsi dari trafik yang ditawarkan.



Gambar 4.3 Blocking sebagai fungsi dari trafik yang ditawarkan dengan menggunakan formula pertama Erlang.

Dalam hal ini dapat dijelaskan bahwa ada tiga parameter yang saling berhubungan pada formula Erlang pertama, yaitu Jumlah dari server (kanal) ***k***, trafik yang ditawarkan **A**, dan probabilitas *blocking* $\boldsymbol{E_{1,n}(A)}$. Jika dua dari parameter tersebut diketahui, maka akan dapat dikalkulasi parameter ke-tiga. Sebagai contoh, jika dilakukan perencanaan suatu sistem switching dimana perlu diprediksi trafik yang ditawarkan kedalam sistem dan spesifikasi dari GoS yang diharapkan; maka jumlah dari server yang diperlukan dapat diperoleh dengan mengaplikasikan formula Erlang pertama tersebut.

Lebih lanjut, untuk melengkapi analisa, perlu diamati dua situasi lainnya terkait jumlah dari pengguna (*user*) M dan jumlah dari trunk N , yaitu situasi dimana **M ≤ N** dan **M > N** (bukan M >> N).

Dalam analisa Erlang, jumlah dari pelanggan M >> N dan disini pelanggan yang *idle* adalah M-N >> N. Akan tetapi, untuk dua situasi di atas, tidak didapat *independence* antara trafik yang ditawarkan dengan jumlah trunk yang sibuk. Yang jelas bahwa untuk kedua sistuasi tersebut, rate kedatangan panggilan tergantung pada jumlah pengguna/pelanggan yang aktif [contoh, $\lambda_k = (M-k)\lambda$, $\mu_k = k\ \mu$], untuk *k* trunk yang sibuk. Dengan menggunakan parameter tambahan $\beta = \lambda/\mu$, yang merupakan trafik yang ditawarkan per "*source*" yang *idle*. Dengan memperhatikan perubahan kondisi *source* antara kondisi "*idle*" dan "sibuk", maka trafik yang ditawarkan per *source* adalah

$$\alpha = \frac{T_{sibuk}}{T_{idle} + T_{sibuk}} = \frac{1/\mu}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\beta}{1+\beta} \qquad \text{..... (4-24)}$$

Dengan berbasis diagram kondisi yang diperlihatkan pada gambar 4.2, dapat dihasilkan fungsi-fungsi distribusi lain. Dalam hal ini :

- Untuk M > N : akan didapat **Distribusi Engset**
  (berlaku trafik Engset atau *pure chance traffic* (tipe 2))
- Untuk M ≤ N : akan didapat **Distribusi Binomial (Bernoulli)**
  (berlaku trafik Bernoulli)

Model Distribusi Engset dan Bernoulli

Distribusi Engset dan Bernoulli didapat dari keadaan sebagai berikut :

- Sumber panggilan (jumlah pelanggan) terbatas
- Jumlah server (saluran/kanal) yang mengolah terbatas
- Rate kedatangan panggilan tergantung pada jumlah pelanggan yang tidak sibuk
- Pelanggan yang telah berhasil melakukan pendudukan server, tidak melakukan panggilan lagi.

Karena rate datangnya panggilan atau trafik yang ditawarkan ke sistem sebanding dengan jumlah pelanggan yang tidak sibuk, maka untuk kondisi k dapat dinyatakan dengan persamaan :

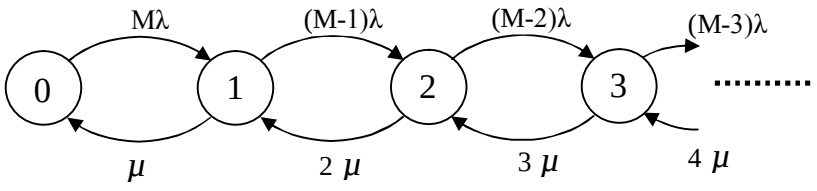
$$C_k = (M-k)\,\lambda \qquad \text{..... (4-25)}$$

dimana :

λ : rate kedatangan panggilan per pelanggan dan merupakan intensitas panggilan dari sumber panggilan yang masih bebas.

$(M-k)$: merupakan jumlah sumber panggilan (pelanggan) yang masih bebas.

C_k dapat dianggap sebagai koefisien kelahiran pada kondisi k ($= \lambda_k$), sehingga diagram kondisi untuk distribusi Engset dan Bernoulli dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 4.3. Diagram kondisi model distribusi Engset dan Bernoulli.

Persamaan kesetimbangannya :

$(M-k)\lambda.\ P(k) = (k+1)\mu.\ P(k+1)$ $\qquad$ k = 0,1,2, ... , (N-1 atau M-1)

Sehingga penyelesaiannya untuk

k = 0 : $\quad M\lambda.\ P(0) = \mu.\ P(1) \longrightarrow P(1) = M\ (\lambda/\mu).\ P(0)$

k = 1 : $\quad (M-1)\lambda.\ P(1) = 2\mu.\ P(2) \longrightarrow P(2) = M(M-1)\ (\lambda/\mu)^2.\ (1/2).P(0)$

k = 2 : $\quad (M-2)\lambda.\ P(2) = 3\mu.\ P(3)$

$\longrightarrow P(3) = M(M-1)(M-2)\ (\lambda/\mu)^3.\ (1/3.2.1).P(0)$

:

:

: dst

Didapat :

$$\mathbf{P_k = \{\ M!/\ k!\ (M-k)!\ \}.\ (\lambda/\mu)^k.\ P(0)} \qquad \text{..... (4-26)}$$

atau

$$\mathbf{P_k = \binom{M}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.\ P(0)} \qquad \text{..... (4-27)}$$

dimana

$\binom{M}{k}$ adalah koefisien binomial = M! / k! (M-k)

Persamaan (4-27) diturunkan dari diagram kondisi dan berlaku baik untuk distribusi Engset mau pun Bernoulli.

Untuk Engset, akhir kondisi adalah N (M > N), dan untuk Bernoulli adalah M (M $\leq$ N).

Penyelesaian Untuk Model Distribusi ENGSET : (M > N)

Berdasarkan persamaan (4-27), dimana :

$$\sum_{k=0}^{M} \mathbf{P}_k = \mathbf{1} = \boldsymbol{P}\,(\mathbf{0}) = \sum_{k=0}^{M} \binom{M}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$P_0 + \binom{M}{1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \binom{M}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \ldots\ldots\ldots + \binom{M}{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\binom{M}{1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \binom{M}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{M}{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N}$$

atau

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} \binom{M}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad \text{..... (4-28)}$$

Dari persamaan (4-27) dan (4-28), didapat penyelesaian :

$$\boldsymbol{P_k} = \frac{\binom{M}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{N} \binom{M}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad \text{..... (4-29)}$$

atau

$$\boldsymbol{P_k} = \binom{M}{k} \frac{\beta^k}{\sum_{i=0}^{N} \binom{M}{i} \beta^i} \qquad \text{..... (4-30)}$$

dan Probabilitas blocking (yaitu pada k = N) :

$$\boldsymbol{P_N} = \binom{M}{N} \frac{\beta^N}{\sum_{i=0}^{N} \binom{M}{i} \beta^i} \qquad \text{..... (4-31)}$$

P_N = probabilitas semua server sibuk (diduduki) = ***TIME CONGESTION***

Untuk menganalisa derajat pelayanan (GoS), digunakan persamaan (4-25), dimana dari persamaan tersebut akan didapat rate trafik yang ditawarkan rata-rata sebagai berikut :

$$C_k = \sum_{k=0}^{N}(M-k)\lambda P_k = M\lambda \sum_{k=0}^{N}\lambda P_k - \lambda\sum_{k=0}^{N}kP_k$$

$$= \lambda\,(M - \sum_{k=0}^{N}kP_k) \qquad \text{..... (4-32)}$$

Nilai $\sum kP_k$ pada persamaan (4-32) merepresentasikan jumlah rata-rata server yang sibuk. Trafik yang diolah oleh jaringan merupakan jumlah rata-rata panggilan yang diterima selama periode waktu pelayanan rata-rata. Ini sama dengan jumlah rata-rata server yang sibuk dalam suatu waktu tertentu yang diberikan. Dengan demikian persamaan (4-32) dapat ditulis menjadi :

$$C = \lambda\,(M - Y)$$

Jika mengacu pada persamaan (4-5), $A = C_A.\ t_\mu$, maka trafik yang ditawarkan dapat dinyatakan dengan,

$$A = \lambda\, t_\mu\,(M - Y)$$

Ketika sistem berada dalam kondisi N, maka rate trafik yang ditawarkan adalah $(M-N)\lambda$, dan semua panggilan yang datang pada kondisi tersebut akan ditolak, sehingga trafik yang hilang adalah

$$A - Y = (M-N)\,\lambda\, t_\mu\, P_N \qquad \text{..... (4-33)}$$

Dengan demikian, GoS – nya sekarang menjadi

$$\mathbf{GoS} = \frac{M-N}{M-Y}P_N \qquad \text{..... (4-34)}$$

Yang mengindikasikan bahwa untuk trafik Engset, *probabilitas blocking* (P_N) dan derajat pelayanan tidak sama, dalam hal ini *time congestion* dan *call congestion* mempunyai nilai yang berbeda.

Penyelesaian Untuk Model Distribusi BERNOULLI : (M ≤ N)

Dengan menggunakan persamaan (4-21) :

$$P_k = \binom{M}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k . P(0)$$

dimana

$$(\lambda/\mu)^k = \{ (\lambda+\mu) / \mu\}^k . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^k$$

$$= \{ (\lambda+\mu) / \mu\}^M . \{(\lambda+\mu) / \mu\}^{k-M} . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^k$$

$$= \{ (\lambda+\mu) / \mu\}^M . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^{M-k} . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^k$$

$$= \{ (\lambda+\mu) / \mu\}^M . \{\lambda / (\lambda+\mu-\lambda) / (\lambda+\mu)\}^{M-k} . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^k$$

$$= \{ (\lambda+\mu) / \mu\}^M . \{1-\lambda / (\lambda+\mu) / (\lambda+\mu)\}^{M-k} . \{\lambda / (\lambda+\mu)\}^k$$

maka didapat :

$$P_k = \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^M . P(0).\binom{M}{k}.\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{M-k} \qquad \text{..... (4-35)}$$

Penurunan lebih lanjut dari persamaan (4-35) di atas akan menghasilkan **persamaan distribusi Bernoulli** atau **Binomial** berikut :

$$\mathbf{P_k} = \binom{M}{k}.\alpha^k.(1-\alpha)^{M-k} \qquad \text{..... (4-36)}$$

Dari persamaan (4-35) dan (4-36) didapat :

$\{ (\lambda+\mu) / \mu\}^M . P_0 = 1$ dan $\alpha = \lambda/\lambda+\mu$

Jadi :

$$P_0 = \frac{1}{\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^M} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^M$$

Persamaan (4-36) yang merupakan persamaan Bernoulli atau Binomial menjelaskan bahwa server-server tidak saling bergantungan satu dengan lainnya.

4.2.1.2 Model Sistem Rugi dengan Trafik *Multiple*

Saat ini, jaringan telekomunikasi secara umum mempunyai lebih dari satu tipe trafik. Tipe trafik yang berbeda akan mempunyai karakteristik yang berbeda terkait dengan kedatangan panggilan, intensitas, dan lama pendudukannya. Jaringan dengan sumber trafik yang heterogen terintegrasi disebut sebagai jaringan terintegrasi (ini merupakan ciri suatu jaringan *circuit switched*). Setiap layanan, juga mempunyai karakteristik trafik yang berbeda. Dalam jaringan dengan transport informasi asinkron, layanan dengan trafik yang berbeda juga akan mempunyai intensitas yang berbeda, contohnya adalah pada transmisi asinkron dari jaringan berbasis paket.

Pada jaringan berbasis paket (*packet-based network*) seperti umumnya pada jaringan terintegrasi, biasanya sumber trafik juga berbeda-beda tipe-nya dan kedatangannya juga mempunyai rate yang berbeda-beda. Jika diasumsikan bahwa suatu kanal (atau suatu unit alokasi *bandwidth*) merupakan unit terkecil yang dapat dialokasikan sistem, maka banyaknya pendudukan dapat dinyatakan dengan kuantisasi satu, dua, tiga atau lebih unit bandwidth (contoh; kanal) untuk koneksi-koneksi yang terjadi (misal *video streaming* dll.).

Untuk analisa suatu sistem dengan sumber panggilan berbasis *full accessibility* dengan peluang terjadinya kerugian (*losses*), dimana distribusi waktu antar kedatangan panggilan dan waktu pendudukan diasumsikan eksponensial, kemudian suatu variabel random ξ digunakan untuk menunjukkan sarana perangkat (*resources*) yang sibuk sebagai fungsi waktu, maka jika b_i menyatakan probabilitas bahwa sebanyak i unit bandwidth dialokasikan pada suatu panggilan, dapat ditulis :

$$B_i = \mathrm{P}\{\ \xi = i\ \} \qquad \text{..... (4-37)}$$

Selanjutnya, jumlah rata-rata saluran yang sibuk (digunakan) adalah

$$b = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i \qquad \text{..... (4-38)}$$

Suatu *blocking* terjadi apabila suatu permintaan koneksi/panggilan baru datang ketika tidak ada lagi *resources* yang dapat dialokasikan untuk koneksi tersebut. Sebagai contoh, jika suatu permintaan koneksi memerlukan 4 kanal sedangkan kanal yang tersedia hanya tiga atau lebih kecil, maka permintaan koneksi tersebut akan diterminasi.

Jika *resources* yang dimaksud adalah merupakan kanal, maka dari setiap kondisi i = 0, 1, 2, ..., n-1 akan didapat rate kedatangan, tetapi jumlah dari kanal yang diminta per panggilan akan bervariasi (misal 1 kanal/panggilan, 2 kanal/panggilan, dan seterusnya). Dengan menggunakan kondisi kesetimbangan secara umum, dengan menggunakan gambar 4.4, dapat ditulis :

$$\lambda \sum_{i=0}^{j-1} P_i b_{j-1} + (j-1)\mu P_{j+1} = (\lambda + j\mu) P_j \qquad j = 0,1,2, ..., n\text{-}1$$

$$\lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i \sum_{k=n-1}^{\infty} b_k = n\mu P_n \qquad \text{..... (4-39)}$$

Sudah barang tentu, konservasi probabilitas kondisi akan tetap

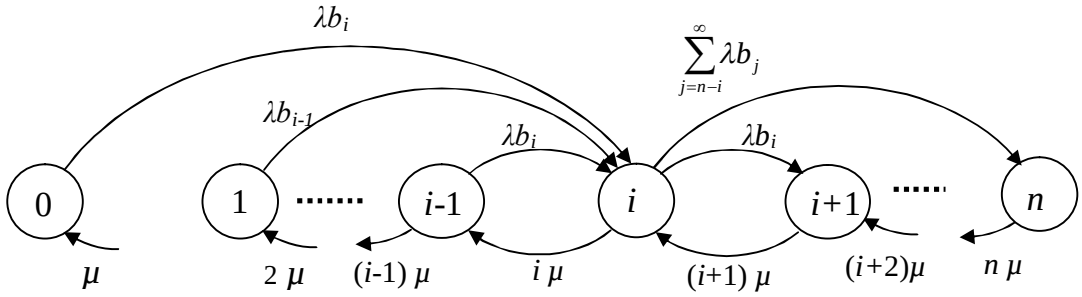
$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

Dengan menjumlahkan persamaan (4-39) dari 0 sampai j-1 akan didapat suatu relasi berulang untuk probabilitas kondisi :

$$P_j = \frac{\lambda}{j\mu} \sum_{i=0}^{j-1} \left(P_i \sum_{k=j-1}^{\infty} b_k \right) \qquad j = 1,2,3, ... , n \qquad \text{..... (4-40)}$$

Trafik yang ditawarkan pada sistem ini dapat dikalkulasi dengan menggunakan persamaan :

$$A = b \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{..... (4-41)}$$



Gambar 4.4 Diagram kondisi untuk analisa trafik terintegrasi.

Selanjutnya, trafik yang diolah adalah

$$A_0 = \sum_{i=0}^{n} iP_i \qquad \text{..... (4-42)}$$

Akhirnya panggilan yang hilang dapat di-kalkulasi dengan menggunakan

$$B_c = 1 - \frac{A_0}{A} \qquad \text{..... (4-43)}$$

Distribusi probabilitas untuk ξ dapat bervariasi. Sebagai contoh, ξ dapat terdistribusi secara geometrik. Selanjutnya, untuk menghitung besarnya probabilitas bahwa sebanyak *i* kanal sibuk/digunakan secara simultan adalah dengan menggunakan persamaan

$$b_i = p(1\text{-}p)^{i\text{-}1} \quad \text{dengan } i = 1,2,3 \text{ .....} \qquad \text{..... (4-44)}$$

dimana *p* adalah probabilitas bahwa adanya suatu panggilan meminta (*request*) satu kanal. Jika menggunakan distribusi geometrik, jumlah rata-rata kanal yang sibuk yang dialokasikan per panggilan adalah $b = 1/p$. Setelah bebarapa tahap penyelesaian dengan aljabar untuk beberapa probabilitas kondisi, maka dapat diperoleh

$$P_j = \frac{pA}{j} \sum_{i=0}^{j-1} P_i (1-p)^{j-i-1} \qquad j = 1,2,3, \text{ .... } , n \qquad \text{..... (4-45)}$$

4.2.1.3 Formula Erlang untuk Sistem *Multidimensional*

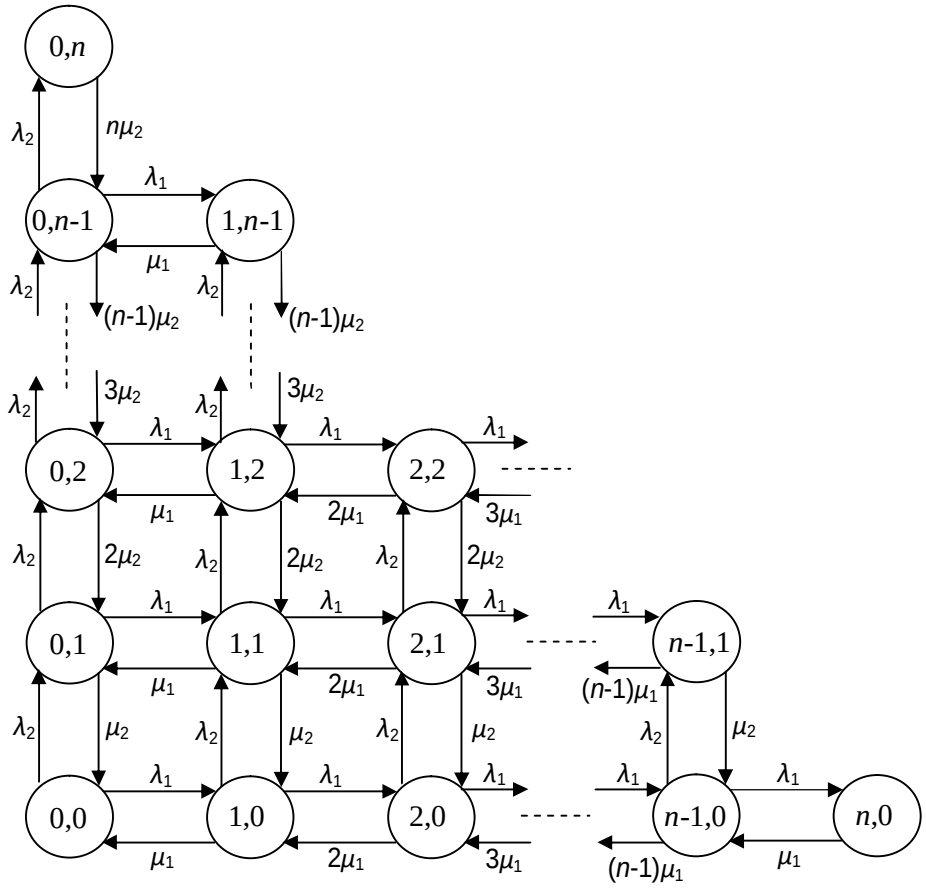
Secara umum, teori trafik dapat di-*generalisir* kedalam sistem dengan trafik *multiple*. Pada sistem ini, akan terdapat kelas-kelas layanan yang berbeda (contoh; layanan-layanan dengan permintaan untuk variasi trafik dan QoS). Setiap kelas dikaitkan dengan suatu *stream* trafik tertentu. Berikut akan dibahas ekspansi formula rugi Erlang untuk suatu kasus umum pada suatu jaringan dengan trafik *multiple*.

Untuk tujuan tersebut, dibahas suatu group dengan *n* unit bandwidth (misal; kanal atau time slot), yang ditawarkan ke dua *stream* trafik *independen* dengan rate kedatangan/layanan (λ_1, μ_1) dan (λ_2, μ_2). Trafik yang ditawarkan adalah $A_1 = \lambda_1/\mu_1$ untuk *stream* 1 dan $A_2 = \lambda_2/\mu_2$ untuk *stream* 2.

Dengan menggunakan notasi (i,j) untuk menunjukkan kondisi sistem ketika ada/terjadi i koneksi dari *stream* 1 dan j koneksi dari *stream* 2. Alokasi dibatasi hanya satu kanal atau slot per koneksi. Maka, dengan $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$, dan $0 \leq i + j \leq n$. Dalam kasus ini, akan didapat kondisi transisi dua dimensi seperti yang diperlihatkan pada gambar 4.5, yang merupakan kebalikan proses Markov.

Dengan asumsi sistem berada dalam keadaan kesetimbangan, maka untuk P(i,j) yang merupakan probabilitas bahwa sistem dalam kondisi (i,j), dapat dinyatakan dengan persamaan

$$P(i,j) = P(i)\,P(j) = k_0 \frac{A_1^i}{i!} \frac{A_2^j}{j!} \qquad \text{..... (4-46)}$$



Gambar 4.5 Diagram kondisi dua dimensi untuk suatu sistem rugi dengan dua tipe trafik dan n unit bandwidth.

Konstanta k_0 pada persamaan (4-46) diperlukan untuk menjaga probabilitas kondisi. Karena proses kelahirannya adalah Poisson, maka total proses kedatangannya juga adalah Poisson. Hal yang sama dapat diberlakukan untuk distribusi waktu layanan-nya. Jika sistem merupakan jaringan *circuit-switched*, maka model dengan kedatangan Poisson tidak sensitif terhadap distribusi waktu layanan, sehingga dapat diperoleh

$$P(k=i+j) = k_0 \frac{(A_1 + A_2)^k}{k!} = k_0 \frac{A^k}{k!} \qquad \text{..... (4-47)}$$

Dari hukum konservasi probabilitas, maka dapat diperoleh konstanta k_0 :

$$k_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(A_1 + A_2)^i}{i!}} \qquad \text{..... (4-48)}$$

Trafik yang ditawarkan adalah $A = A_1 + A_2$. *Time congestion, call congestion,* dan *traffic congestion* adalah identik untuk kedua *stream* trafik tersebut, dikarenakan proses kedatangannya sama-sama Poisson, dan sama dengan $P(n) = P(i+j=n)$.

Secara umum, dapat disimpulkan bahwa untuk *stream s* dengan rate (λ_1, μ_1) , (λ_2, μ_2), ..., (λ_s, μ_s) maka total trafik yang ditawarkan ke dalam sistem adalah

$$A = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{s} A_i \qquad \text{..... (4-49)}$$

Selanjutnya sistem *multidimensional* dapat pula diinterpretasikan dengan menggunakan distribusi waktu layanan *hyper-exponential*. Dalam kasus ini, tetap akan digunakan proses kedatangan Poisson dengan rate kedatangan total:

$$\lambda_T = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_s$$

Waktu pendudukannya adalah terdistribusi *hyper-exponential* dengan *density function* :

$$f_\mu(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_T}\mu_1 e^{-\mu_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_T}\mu_2 e^{-\mu_2 t} + ... + \frac{\lambda_s}{\lambda_T}\mu_s e^{-\mu_s t} \qquad \text{..... (4-50)}$$

Waktu layanan rata-rata untuk kasus distribusi *hyper-exponential* adalah

$$\overline{t_\mu} = \frac{\lambda_1}{\lambda_T}\frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_T}\frac{1}{\mu_2} + ... + \frac{\lambda_s}{\lambda_T}\frac{1}{\mu_s} = \frac{\sum_{i=1}^{s} A_i}{\lambda_T} = \frac{A_T}{\lambda_T} \qquad ..... (4\text{-}51)$$

Rate layanan rata-rata dapat dikalkulasi dengan

$$\mu_T = \frac{1}{\overline{t_\mu}} = \frac{\lambda_T}{A_T} \qquad ..... (4\text{-}52)$$

Sehingga model umum (*generalized*) dengan *stream* trafik *s* kedalam sistem adalah :

$$P\ (j_1, j_2, ... , j_s\ ) = k_0\ \frac{A_1^{j_1}}{j_1!}\frac{A_2^{j_2}}{j_2!}....\frac{A_s^{j_s}}{j_s!} \qquad ..... (4\text{-}53)$$

$$0 \le j_i \le n\ ,\ 1 \le i \le s\ ,\ j_1 + j_2 + ... + j_s \le n$$

Selanjutnya, probabilitas bahwa *j* unit bandwidth sibuk dalam suatu sistem rugi dengan *n* unit bandwidth adalah

$$P\ (j) = \frac{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i\right)^j}{j!}}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{s} A_i\right)^k}{k!}} \qquad ..... (4\text{-}54)$$

Persamaan (4-54) adalah merupakan **formula rugi Erlang multidimensional**. Bandwidth yang diminta oleh suatu panggilan tergantung pada tipe layanan. Dalam hal ini, untuk layanan *voice* dibutuhkan satu unit bandwidth per panggilan, sedangkan *video stream* membutuhkan dua atau lebih. Jika c_i merupakan unit bandwidth yang diminta per panggilan dari tipe layanan *i*. Maka dapat dinyatakan

$$C_i\, j_i \le n_i \le n\ , \quad i = 1,2,3, ..., s \qquad ..... (4\text{-}55)$$

$$\sum_{i=1}^{s} c_i\, j_i \le n$$

Dimana j_i adalah jumlah panggilan dari tipe layanan *i* .